Lezione 2

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Metriche di probabilità

Definizione (classe separante)

Consideriamo $\mathcal{H}$ una collezione di funzioni misurabili $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Diciamo che $\mathcal{H}$ e' una classe separante se $\forall\, F, G$ v.a. reali t.c. $h(F), h(G) \in L^1(\Omega)$ $\forall\, h \in \mathcal{H}$ e

$$\mathbb{E}[h(F)] = \mathbb{E}[h(G)] \quad \forall\, h \in \mathcal{H}$$

allora $F \overset{d}{=} G$.

Esempi

1. $\mathcal{H} = \{ \mathbb{1}_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ → σ-algebra di Borel di $\mathbb{R}$
2. $\mathcal{H} = \{ e^{i\sigma \cdot},\ \sigma \in \mathbb{R} \}$
3. $\mathcal{H} = \{$ funz misurabili e limitate $\}$

⋮

Consideriamo $\mathcal{H}$ una classe separante e F, G v.a. reali t.c. $h(F), h(G) \in L^1(\Omega)$ $\forall\, h \in \mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ induce una misura della discrepanza tra le leggi di F e G : (2)

$$d_{\mathcal{H}}(F,G) := \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(G)] \right|$$

Distanze speciali

1. distanza di Kolmogorov $\quad \mathcal{H}_{Kol} := \{ \mathbb{1}_{(-\infty, z]},\ z \in \mathbb{R} \}$

$$d_{Kol}(F,G) := \sup_{z \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}(F \leq z) - \mathbb{P}(G \leq z) \right|$$

2. distanza variazione totale $\quad \mathcal{H}_{TV} = \{ \mathbb{1}_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

$$d_{TV}(F,G) := \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \mathbb{P}(F \in B) - \mathbb{P}(G \in B) \right|$$

3. Wasserstein $\quad \mathcal{H}_W = \{ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz con costante di Lipschitz $\|h\|_{Lip} \leq 1 \}$

con $\quad \|h\|_{Lip} := \sup_{x \neq y} \dfrac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|}$

$$d_W(F,G) := \sup_{\|h\|_{Lip} \leq 1} \left| \mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(G)] \right|$$

teorema Kantorovich Rubinstein $\quad = \inf_{\substack{(X,Y) \text{ coupling} \\ \text{di } (F,G)}} \mathbb{E}[|X-Y|]$

4. Fortet - Mourier $\mathcal{H}_{FM} := \{ h : \|h\|_{Lip} + \|h\|_\infty \leq 1 \}$

$$d_{FM}(F,G) := \sup_{\|h\|_{Lip}+\|h\|_\infty \leq 1} \left| \mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(G)] \right|$$

3

Osservazioni 1. $h \in \mathcal{H}_{FM} \Rightarrow h \in \mathcal{H}_W$

$$d_{FM}(F,G) \leq d_W(F,G)$$

2. $h \in \mathcal{H}_{Kol} \Rightarrow h \in \mathcal{H}_{TV}$

$$d_{Kol}(F,G) \leq d_{TV}(F,G)$$

3. Se G e' a.c. rispetto alla misura di Lebesgue, allora

Chen - Goldstein
Shao (2011)
Teorema 3.3

$$d_{Kol}(F,G) \leq 2\sqrt{d_W(F,G)}$$

Proprieta' Le topologie indotte da d_{Kol}, d_{TV} e d_W sono strettamente più forti della topologia indotta dalla convergenza in distribuzione

dimostrazione (d_{Kol} e d_{TV})

Siano F_n, $n \geq 1$, F v.a. tali che

$$d_{Kol}(F_n, F) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Allora $\mathbb{P}(F_n \leq x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(F \leq x) \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F_n \underset{n\to+\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} F$

Stessa cosa per d_{TV}.

· Consideriamo $F_n = \frac{1}{n}$ q.c.
Allora $F_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \equiv F$ q.c.

$$d_{Kol}(F_n, F) := \sup_{z \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}(F_n \leq z) - \mathbb{P}(F \leq z) \right| = 1$$

$$\Rightarrow d_{TV}(F_n, F) \geq 1$$

(d_W) Supponiamo che $\exists \, F_n$, $n \geq 1$, F t.c.

$$d_W(F_n, F) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$d_W(F_n, F) = \sup_{\|h\|_{Lip} \leq 1} \left| \mathbb{E}[h(F_n)] - \mathbb{E}[h(F)] \right|$$

$\mathbb{R} \ni \lambda \neq 0$ $\quad \underset{\mathcal{H}_W}{\underset{\cap}{h_\lambda(x)}} := \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$, $\underset{\mathcal{H}_W}{\underset{\cap}{g_\lambda(x)}} := \frac{\cos \lambda x}{\lambda}$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[e^{i\theta F_n}\right] \xrightarrow[n]{} \mathbb{E}\left[e^{i\theta F}\right] \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} F$$

5

Consideriamo $U \sim \text{Unif}\,[0,1]$

$$n \geq 1 \qquad F_n := \begin{cases} n & \text{per } U \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} 0 \equiv F \quad \Rightarrow \quad F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} 0 \equiv F$$

ma $d_W(F_n, F) \geq 1$ infatti presa $h(x) = x$ abbiamo

$$\mathbb{E}[h(F_n)] = 1 \quad e \quad \mathbb{E}[h(F)] = 0$$

Proposizione F_n, $n \geq 1$, F v.a. t.c. $z \mapsto \mathbb{P}(F \leq z)$ e' continua.
Allora $F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} F$ se e solo se $d_{Kol}(F_n, F) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

dimostrazione · $d_{Kol}(F_n, F) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ allora

$$F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} F$$

6

- Consideriamo f_n, f funzioni definite su $[-\pi/2, \pi/2]$ t.c. $f_n(-\pi/2) = f(-\pi/2) = 0$

$$f_n(\pi/2) = f(\pi/2) = 1$$

e per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $f_n(x) := \mathbb{P}(F_n \leq tg(x))$

continua $\rightarrow f(x) := \mathbb{P}(F \leq tg(x))$.

$$F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} F \implies f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

f_n crescente $\forall n$

- f_n, f definite su $[a,b]$
- f continua
- f_n crescente $\forall n$

Quindi per il II teorema del Dini, abbiamo

$$\sup_{x\in[-\pi/2,\pi/2]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\parallel$$

$$d_{Kol}(F_n, F) = \sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(F_n \leq z) - \mathbb{P}(F \leq z)|$$

- $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

allora $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Osservazioni: la proposizione appena dimostrata non si estende né al caso di d_{TV} né al caso di d_W.

- (d_{TV}) Prendiamo ε_i, $i \geq 1$ iid Rademacher ($\sim Unif\{\pm 1\}$) e consideriamo

$$F_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \xrightarrow[n\to+\infty]{d} F \sim N(0,1)$$

7

ma $d_{TV}(F_n, F) = 1$

Prendiamo $\xi_n := \left\{ \frac{k}{\sqrt{n}}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$, allora

$\mathbb{P}(F_n \in \xi_n) = 1$ e $\mathbb{P}(F \in \xi_n) = 0$

quindi $\underset{1 \geq}{} d_{TV}(F_n, F) = \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \mathbb{P}(F_n \in B) - \mathbb{P}(F \in B) \right|$

$$\geq \left| \mathbb{P}(F_n \in \xi_n) - \mathbb{P}(F \in \xi_n) \right|$$

$$= 1$$

$\Rightarrow d_{TV}(F_n, F) = 1$

(d_W) $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, $U \sim \mathrm{Unif}[0,1]$, $U \perp\!\!\!\perp N$

$$U_n := \begin{cases} n & \text{se } U \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Consideriamo $F_n := U_n + N \xrightarrow[n \to +\infty]{d} \overset{F}{\overset{\shortparallel}{N}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

ma $d_W(F_n, F) \geq 1$. Basta prendere $h(x) = x$

e quindi $d_W(F_n, F) \geq \left| \mathbb{E}[h(F_n)] - \mathbb{E}[h(F)] \right|$

$$= 1$$

Proposizione $F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} F \iff d_{FM}(F_n, F) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Teorema 11.3.3., Dudley 2003

Metodo di Stein Sia γ la densità Gaussiana standard

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Lemma di Stein Una v.a. N e' Gaussiana standard se e solo se $\forall f$ a.c. tale che $f' \in L^1(\gamma)$ si ha

$$\mathbb{E}[|N f(N)|] < +\infty \text{ e}$$

$$\mathbb{E}[N f(N)] = \mathbb{E}[f'(N)].$$

dimostrazione

$\Uparrow$
- Prendiamo $f(x) = 1$ quindi $\mathbb{E}[|N|] < +\infty$ e $\mathbb{E}[N] = 0$
- Prendiamo $f(x) = x$ quindi $\mathbb{E}[|N|^2] < +\infty$ e $\mathbb{E}[N^2] = 1$
- Prendiamo $f(x) = f_m(x) = x^m$ $\quad m \geq 2$

quindi $\mathbb{E}[|N|^{m+1}] < +\infty$ e

$$\mathbb{E}[N^{m+1}] = m\, \mathbb{E}[N^{m-1}]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[N^m] = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ e' dispari} \\ \underset{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-1)}{\underset{\shortparallel}{(m-1)!!}} & \text{se } m \text{ e' pari} \end{cases}$$

Sono i momenti della Gaussiana standard!

$$\Rightarrow N \sim \mathcal{N}(0,1).$$

$\textcircled{\Downarrow}$ $N \sim N(0,1)$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.c. tale che $f' \in L^1(\gamma)$

Posso assumere s.p.g. che $f(0)=0$

9

a. $\mathbb{E}[|N f(N)|] < +\infty$

$$\mathbb{E}[|N f(N)|] = \int_{\mathbb{R}} |x| \, |f(x)| \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |x| \left| \int_0^x f'(y) dy \right| \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^0 dy \, |f'(y)| \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} + \int_0^{+\infty} dy \, |f'(y)| \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \mathbb{E}[|f'(N)|] < +\infty$$

b. Allo stesso modo si dimostra che

$$\mathbb{E}[N f(N)] = \mathbb{E}[f'(N)].$$

Idea di Stein Supponiamo che N sia una v.a. tale che

$$\mathbb{E}[N f(N)] - \mathbb{E}[f'(N)] \approx 0$$

per una vasta classe di funzioni f allora $N \approx N(0,1)$.

Esercizio Sia $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $N \sim N(\mu, \sigma^2)$ se e solo se $\forall$ funzione f a.c. tale che $\mathbb{E}[|f'(N)|] < +\infty$ si ha $\mathbb{E}[(N-\mu) f(N)] = \sigma^2 \mathbb{E}[f'(N)]$

Equazione di Stein

Sia $N \sim N(0,1)$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile t.c. $\mathbb{E}[|h(N)|] < +\infty$. L'equazione di Stein associata a h e' l'EDO

$$(S\text{-}h) \qquad f'(x) - x f(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)]$$

Una soluzione di $(S\text{-}h)$ e' una funzione f a.c. tale che esista una versione della derivata prima che soddisfi $(S\text{-}h)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Proposizione Ogni soluzione a $(S\text{-}h)$ ha la forma

$$f(x) = c e^{x^2/2} + e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} \left(h(y) - \mathbb{E}[h(N)]\right) e^{-y^2/2} \, dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

con $c \in \mathbb{R}$

In particolare, $f_h(x) := e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} \left(h(y) - \mathbb{E}[h(N)]\right) e^{-y^2/2} \, dy$

si ha che f_h e' l'unica soluzione f di $(S\text{-}h)$ tale che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) e^{-x^2/2} = 0$.

Osservazione Dato che $\int_{\mathbb{R}} \left(h(y) - \mathbb{E}[h(N)]\right) e^{-y^2/2} \, dy = 0$

si ha che

$$\int_{-\infty}^{x} \underbrace{\left(h(y) - \mathbb{E}[h(N)]\right) e^{-y^2/2}} dy = -\int_{x}^{+\infty} [\quad] dy .$$

11

dimostrazione l'equazione (S-h) può essere riscritta come

$$e^{x^2/2} \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2} f(x)\right) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)]$$

Dal teorema della CD

$$\lim_{x \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{x} \left(h(y) - \mathbb{E}[h(N)]\right) e^{-y^2/2} dy = 0$$

quindi $\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2/2} f(x) = 0 \iff c = 0.$

$\downarrow$

soluzione di (S-h)

$\square$

Usiamo (S-h) per formalizzare l'idea di Stein.

Consideriamo una fmz $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile t.c.

$\mathbb{E}[|h(N)|] < +\infty$ e $\mathbb{E}[|h(F)|] < +\infty$ (F, N v.a.)

$N \sim N(0,1)$

Sia f_h la soluzione a (S-h) con $c = 0$, si ha

$$f_h'(x) - x f_h(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$f_h'(F) - F f_h(F) = h(F) - \mathbb{E}[h(N)]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}[f_h'(F) - F f_h(F)] = \mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(N)]$$

Se $\mathcal{H}$ e' una classe separante t.c. $h(F), h(N) \in L^1(\Omega)$ $\forall h \in \mathcal{H}$, allora

$$d_{\mathcal{H}}(F,N) := \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(N)] \right|$$

12

$$= \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \mathbb{E}[f_h'(F) - F f_h(F)] \right|$$

Stime di Stein per d_{TV} $\quad d_{TV}(F,G) = \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \mathbb{P}(F \in B) - \mathbb{P}(G \in B) \right|$

Teorema Sia $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ misurabile.
Allora la soluzione f_h dell'equazione (S-h) e' t.c. $\quad \|f_h\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e $\|f_h'\|_\infty \leq 2$.

In particolare, per $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $F \in L^1(\Omega)$

$$d_{TV}(F,N) \leq \sup_{f \in \mathcal{F}_{TV}} \left| \mathbb{E}[f'(F)] - \mathbb{E}[F f(F)] \right|$$

con $\mathcal{F}_{TV} := \left\{ f : \|f\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \|f'\|_\infty \leq 2 \right\}$.

Osservazione 1. $F \in L^1(\Omega) \Rightarrow \mathbb{E}[|F f(F)|] < +\infty$ $\forall f \in \mathcal{F}_{TV}$

2. $\mathcal{F}_{TV}$ si intende l'insieme delle fnz f

a.c. e (i) limitate da $\sqrt{\pi/2}$, (ii) $\exists$ una versione di f' limitata da 2. (13)

3. Il $\sup \left| \mathbb{E}[f'(F)] - \mathbb{E}[F f(F)] \right|$ sta per $f \in \mathcal{F}_{TV}$

$\sup\limits_{(f,g)} \left| \mathbb{E}[g(F)] - \mathbb{E}[F f(F)] \right|$ dove $f \in \mathcal{F}_{TV}$ e g e' una versione della derivata prima di f, limitata da 2.

Ovviamente, $\mathbb{E}[f'(F)]$ e' definita univocamente se f e' differenziabile q.o. e F ha densita'.

dimostrazione $h : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$f_h(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} \left(h(y) - \mathbb{E}[h(N)]\right) e^{-y^2/2}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

Abbiamo che $\left| h(x) - \mathbb{E}[h(N)] \right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$= -e^{x^2/2} \int_{x}^{+\infty} \left(h(y) - \mathbb{E}[h(N)]\right) e^{-y^2/2}\, dy$$

$$\Rightarrow |f_h(x)| \leq e^{x^2/2} \min\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy, \int_{x}^{+\infty} e^{-y^2/2}\, dy \right)$$

$$= e^{x^2/2} \int_{|x|}^{+\infty} e^{-y^2/2}\, dy \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Consideriamo la fnz $S(x) := e^{x^2/2} \int_{|x|}^{+\infty} e^{-y^2/2}\, dy$. 14

s raggiunge il massimo in

$x = 0$ e $S(0) = \sqrt{\pi/2}$

$$\Rightarrow \boxed{\|f_h\|_\infty \le \sqrt{\pi/2}}$$

- $f_h'(x) = x f_h(x) + h(x) - \mathbb{E}[h(N)]$

$$= x e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} \left(h(y) - \mathbb{E}[h(N)]\right) e^{-y^2/2}\, dy$$

$$+ h(x) - \mathbb{E}[h(N)]$$

$$\Rightarrow |f_h'(x)| \le 1 + |x| e^{x^2/2} \int_{|x|}^{+\infty} e^{-y^2/2}\, dy$$

$$\le 1 + e^{x^2/2} \int_{|x|}^{+\infty} y\, e^{-y^2/2}\, dy = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|f_h'\|_\infty \le 2}$$

Ora

$$d_{TV}(F,N) = \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \mathbb{P}(F \in B) - \mathbb{P}(N \in B) \right|$$

$$\le \sup_{f \in \mathcal{F}_{TV}} \left| \mathbb{E}[f'(F)] - \mathbb{E}[F f(F)] \right|$$

Stima di Stein per d_{Kol}

Teorema $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, $F \in L^1(\Omega)$

$$d_{Kol}(F,N) \le \sup_{f \in \mathcal{F}_{Kol}} \left| \mathbb{E}[f'(F) - F f(F)] \right|$$

dove $\mathcal{F}_{Kol} := \left\{ f : \|f\|_\infty \le \frac{\sqrt{2\pi}}{4},\ \|f'\|_\infty \le 1 \right\}$

Notazione 1. $\mathcal{F}_{Kol}$ e' l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.c. tali che (i) limitate da $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ (ii) differenziabili tranne che in un numero finito di punti (iii) $\exists$ una versione g della derivata prima t.c. $\|g\|_\infty \le 1$.

2. Per il sup l'interpretazione e' la stessa di prima per d_{TV}

Stime di Stein per d_W e d_{FM}

Teorema $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, $F \in L^2(\Omega) \Rightarrow \mathbb{E}[|F f(F)|] < +\infty \quad \forall f \in \mathcal{F}_W$

$$d_{FM}(F,N) \le d_W(F,N) \le$$

$$\le \sup_{f \in \mathcal{F}_W} \left| \mathbb{E}[f'(F) - F f(F)] \right|$$

dove $\mathcal{F}_W := \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ C^1 : \|f\|_\infty \le 1,$
$\|f'\|_\infty \le \sqrt{2/\pi},\ \|f''\|_\infty \le 2 \}$

Osservazione $\mathcal{F}_W$ e' l'insieme delle funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ C^1 : \|f\|_\infty \le 1,\ \|f'\|_\infty \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ e f' e' a.c. e $\exists$ una versione g di f'' tale che $\|g\|_\infty \le 2$.

Esempio $N_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$, $N_2 \sim N(0,\sigma_2^2)$
$\sigma_1, \sigma_2 > 0$

allora
$$d_{TV}(N_1,N_2) \le \frac{2}{\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2} |\sigma_1^2 - \sigma_2^2|$$
$$d_{Kol}(N_1,N_2) \le \frac{1}{\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2} |\sigma_1^2 - \sigma_2^2|$$
$$d_{FM}(N_1,N_2) \le d_W(N_1,N_2) \le \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma_1 \vee \sigma_2} |\sigma_1^2 - \sigma_2^2|$$

Dimostriamo la stima per d_{TV}.
Supponiamo $\sigma_1 \le \sigma_2$ e consideriamo $N_0 \sim N(0,1)$.
Osserviamo che
$$d_{TV}(N_1, N_2) = \sup_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mathbb{P}(N_1 \in B) - \mathbb{P}(N_2\in B)|$$
$$= \sup_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \mathbb{P}\left(\frac{N_1}{\sigma_2} \in B\right) - \mathbb{P}(N_0 \in B) \right|$$

$$= d_{TV}\left(N_1/\sigma_2, N_0\right).$$

17

Dal teorema dimostrato si ha che

$$d_{TV}\left(N_1/\sigma_2, N_0\right) \le \sup_{f \in \mathcal{F}_{TV}} \left| \mathbb{E}\left[f'(N_1/\sigma_2) - \frac{N_1}{\sigma_2} f(N_1/\sigma_2) \right] \right|$$

Esercizio (lemma di Stein)

$$= \sup_{f \in \mathcal{F}_{TV}} \left| \mathbb{E}\left[f'(N_1/\sigma_2)\left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) \right] \right|$$

$$\le 2 \left| 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right| = \frac{2}{\sigma_2^2} \left| \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \right|$$

$$= \frac{2}{\sigma_1^2 \vee \sigma_2^2} \left| \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \right|.$$

Applicazioni

Teorema di Berry-Esseen

$\{X_1, X_2, \dots\}$ v.a. iid $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\operatorname{Var}(X_1) = 1$

$$F_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to +\infty]{d} N \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Teorema (Berry-Esseen)

Assumiamo che $\mathbb{E}[|X_1|^3] < +\infty$, allora

$$d_{Kol}(F_n, N) \le C \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3]}{\sqrt{n}}$$

18

con $C>0$ che non dipende né da n né da $\{X_1, X_2, \dots\}$

Curiosità! Nel 1956 Berry ha dimostrato che

$$C \geq \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} \simeq 0.40973$$

Nel 2010 Tyurin ha dimostrato che vale la stima di Berry-Esseen con $C \approx 0.4785$

Teorema $X_1, X_2, \dots$ indipendenti $\mathbb{E}[X_i]=0$, $Var(X_i)=1$, $\mathbb{E}[|X_i|^3]<+\infty$

$F_m := \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m X_i$, $N \sim N(0,1)$

allora $d_W(F_m, N) \leq 3 \frac{\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[|X_i|^3]}{m^{3/2}}$.

dimostrazione Sia $f \in C^1$ t.c. $\|f\|_\infty \leq 1$, $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2/\pi}$, $\|f''\|_\infty \leq 2$

Si ha

$$\rightarrow \quad \mathbb{E}[F_m f(F_m)] = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i f(F_m)]$$

Definiamo $F_m^{(i)} := F_m - \frac{X_i}{\sqrt{m}} = \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1,\dots,m}} \frac{X_j}{\sqrt{m}}$, $i=1,\dots,m$

$\Rightarrow F_m^{(i)} \perp\!\!\!\perp X_i$

$$\cdot\ \mathbb{E}[X_i f(F_n^{(i)})] \overset{\downarrow}{=} \mathbb{E}[\underbrace{X_i}_{=0}]\,\mathbb{E}[f(F_n^{(i)})] = 0$$

$$\cdot\ \mathbb{E}[X_i f(F_n)] = \mathbb{E}[X_i(f(F_n) - f(F_n^{(i)}))]$$

$$\to\ = \mathbb{E}[X_i(f(F_n) - f(F_n^{(i)}) - (F_n - F_n^{(i)})f'(F_n^{(i)}))]$$

$$+ \mathbb{E}[X_i(F_n - F_n^{(i)})f'(F_n^{(i)})]$$

Osserviamo che $|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)| \leq$

$$\leq \frac{1}{2}|b-a|^2 \|f''\|_\infty \text{ e}$$

$F_n - F_n^{(i)} = X_i/\sqrt{n}$. Quindi

$$\left|\mathbb{E}\left[X_i\left(f(F_n) - f(F_n^{(i)}) - X_i/\sqrt{n}\, f'(F_n^{(i)})\right)\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[|X_i|\frac{X_i^2}{n}\right]\cdot 2 = \frac{\mathbb{E}[|X_i|^3]}{n}$$

Inoltre $\mathbb{E}[X_i(F_n - F_n^{(i)})f'(F_n^{(i)})]$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{X_i^2}{\sqrt{n}} f'(F_n^{(i)})\right] = \frac{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}[X_i^2]}}}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[f'(F_n^{(i)})]$$

$$= \frac{\mathbb{E}[f'(F_n^{(i)})]}{\sqrt{n}}.$$

Otteniamo

$$\left| \mathbb{E}\left[F_m f(F_m) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathbb{E}\left[f'(F_m^{(i)})\right]\right]\right| \leq \frac{\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[|X_i|^3]}{m^{3/2}}$$

Infine $\left|\mathbb{E}\left[F_m f(F_m) - f'(F_m)\right]\right| \leq$

20

$$\leq \left| \mathbb{E}\left[F_m f(F_m) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathbb{E}\left[f'(F_m^{(i)})\right]\right]\right|$$

$$+ \left| \mathbb{E}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m f'(F_m^{(i)}) - f'(F_m)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[|X_i|^3]}{m^{3/2}} + \frac{2}{m^{3/2}}\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[|X_i|]$$

Osserviamo che $\mathbb{E}[X_i^2]=1$ quindi $\mathbb{E}[|X_i|^3] \geq 1$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[|X_i|] \leq \left(\mathbb{E}[|X_i|^3]\right)^{1/3} \leq \mathbb{E}[|X_i|^3]$$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{F}_W, \quad \left|\mathbb{E}\left[F_m f(F_m) - f'(F_m)\right]\right| \leq$$

$$\leq \frac{3}{m^{3/2}}\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[|X_i|^3].$$

$\square$

Ricordiamo

$$d_{Kol}(F_m, N) \leq 2\sqrt{d_W(F_m, N)}$$

Esercizio Dimostrare Teorema di B-E "classico" con il metodo di Stein. Cap 3 Nourdin-Peccati, 2012